

## РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В АН КазССР

Сергей Арнольдович Инютин

*НИУ «Московский авиационный институт (МАИ)», Москва, Российская Федерация, inyutin\_sa@mail.ru*

**Аннотация** – Перенесение научных исследований в области модулярной арифметики из Зеленограда в Академию наук Казахстана в конце 70-х годов прошлого века дало мощный импульс развитию параллельных вычислительных методов с использованием целочисленной модулярной арифметики комплексных чисел и приложениям этой арифметики в системах оперативного управления движением летательных аппаратов. Применение Гауссовой модулярной целочисленной арифметики с сопряженными комплексными основаниями для управления движением летательных аппаратов впервые исследовалось группой исследователей под руководством академика АН КазССР В.М. Амербаевым. Для этих классов задач модулярная арифметика оказалась эффективнее традиционной позиционной, так как вычисление основных функций, базисных для линейной алгебры, выполнялось с меньшей временной сложностью. Результаты исследований нашли признание в договорных работах с научно-производственными объединениями страны и отражены в ряде монографий и нескольких тематических сборниках научных статей.

**Ключевые слова** – модулярная арифметика, система счисления в остаточных классах, параллельная гауссова арифметика комплексных чисел.

### I. ВВЕДЕНИЕ

Перемещение научных исследований по модулярной арифметике в Академию наук Казахстана в конце 70-х годов прошлого века дало мощный импульс развитию исследований по параллельным вычислительным методам с использованием целочисленной арифметики комплексных чисел. Получили развитие приложения этой арифметики для различных областей, требующих больших объемов вычислений, в том числе в системах оперативного управления движением пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов. Казахстан был выбран не случайно, так как на его территории были размещены несколько специализированных ЭВМ КЗ40А, разработанных в Специализированном вычислительном центре МЭП СССР (г. Зеленоград) [1, 2]. Генеральным конструктором разработки ЭВМ был Д.И. Юдицкий, а научным руководителем – И.Я. Акушский. Эти ЭВМ имели параллельную SIMD-архитектуру, высокую надёжность, обеспеченную оперативной реконфигурацией и обладали высоким быстродействием обработки для отдельных классов задач, основной объём в которых давали базисные для линейной алгебры операции. ЭВМ обрабатывали форматы данных, содержащих числовые величины в модулярной системе счисления.

Числовые величины, принадлежащие конечному подмножеству некоторого числового множества  $A \in \{0, \dots, P-1\}$ , верхняя грань которого равна произведению  $P = \prod_{i=1}^n p_i$  оснований  $p_i; i \in \{1, \dots, n\}$  модулярной системы счисления. Величины простых (попарно взаимно-простых) оснований предполагаются близкими для согласования производительности процессорных элементов, выполняющих вычисления по отдельным основаниям. Для экономии информационной ёмкости разрядной сетки основания  $\{p_1, \dots, p_i, \dots, p_n\}$  выбираются простыми (попарно взаимно-простыми). Целочисленная числовая величина  $A$ , может быть задана векторным модулярным представлением:

$$A \leftrightarrow (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \in W^n,$$

где  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_i \equiv A \pmod{p_i}$ ;  $P = \prod_{i=1}^n p_i$  – верхняя грань компьютерного вычислительного диапазона.

Другими словами,  $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$  – вектор модулярного представления числовой величины  $A$ , компоненты вектора есть наименьшие неотрицательные вычеты по модулям – основаниям  $p_i$ . В модулярной арифметике все кольцевые  $A \circ B \pmod{P}$  операции выполняются независимо вычислениями по модулям в параллельных вычислительных трактах, соответствующих основаниям модулярной системы счисления:

$$A \circ B(\bmod P) \leftrightarrow ((a_1 \cdot b_1 \bmod p_1), \dots, (a_n \cdot b_n \bmod p_n)) \in W^n$$

При наличии избыточных оснований возникает возможность реконфигурации вычислительных трактов, что повышает надёжность модулярного вычислительного процесса [2, 3].

## II. ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Борьба за повышение скорости выполнения сложных вычислительных процессов не сводится только к увеличению быстродействия элементной базы компьютеров. Совершенствование элементной базы трудный и дорогостоящий процесс, требующий открытия новых физических принципов, разработки технологий и создания аппаратуры для их реализации в производстве [3, 4].

Основная задача компьютера – выполнение вычислений, первоначально они и создавались для этого. По этой причине компьютер является, прежде всего, техническим устройством для автоматической обработки машинных форматов данных, в которых отображается структурированная информация. В разрядной сетке типового компьютера в машинных форматах данных отображаются конечные целые или рациональные числовые величины (числовые объекты) в различных системах счисления над которыми выполняются вычисления по алгоритмам машинных арифметик этих систем.

Закон Амдала для модулярной арифметики имеет расширенную трактовку, распараллеливание рассматривается на двух уровнях: макроуровне – уровне параллельных ветвей вычислительного алгоритма и микроуровне – уровне исполнительных команд. Это приводит к тому, что доля последовательных вычислений при модулярном подходе также распараллеливается на микроуровне до некоторого несжимаемого предела. При применении модулярной арифметики распараллеливание на уровне алгоритмов решения вычислительной проблемы (задачи) дополняется распараллеливанием на микроуровне (уровне машинных операций) над модулярными форматами данных.

Вопрос о применении Гауссовой модулярной целочисленной арифметики с сопряженными комплексными основаниями для описания управления движением летательных аппаратов впервые был поставлен академиком АН КазССР В.М. Амербаевым, специально приглашенным в Казахстан в 70-х годах XX века из Зеленоградского научного центра МЭП СССР для развития нового научного направления Президентом АН КазССР А.М. Кунаевым, братом первого секретаря компартии Казахстана. Вместе с академиком В.М. Амербаевым также был приглашен основоположник развития модулярной арифметики (отечественное название система счисления в остаточных классах) и применения её для вычислительных устройств член-корреспондент АН КазССР И.Я. Акушский, работавший заместителем директора по научным вопросам одного из НИИ г. Зеленограда.

## III. БАЗА ИССЛЕДОВАНИЙ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

В тот период в Институте математики и механики АН КазССР имелась хорошая кадровая база для развития этих исследований в двух подразделениях института, возглавляемых профессорами И.Т. Пак и А.Н. Казангаповым. В отделе Синтеза и анализа многомерных цифровых данных» (профессор И.Т. Пак) исследовались методы потокового выполнения модулярных вычислительных процессов, и велись поиски наиболее эффективных областей приложения модулярных вычислений с использованием комплексных чисел. В отделе параллельных вычислительных структур выполнялось моделирование и макетирование машинных операций для вычислительных средств нетрадиционной структуры, включая номографические методы вычислений, ориентированных на применения импульсных лазеров. Результаты этих исследований были обобщены в докторской диссертации А.Н. Казангапова. Кроме кадров, в Академии наук также имелась инструментальная база, предназначенная для макетирования разрабатываемых устройств. Моделирование параллельных вычислительных методов выполнялось в Вычислительном центре Академии наук, куда регулярно поступали новые вычислительные машины серии ЕС, начиная с ЕС-1033 и заканчивая двумя большими вычислительными машинами ЕС-1045, которые интенсивно использовались в режимах разделения времени и пакетной обработки. Исследования в перспективной научной области выполнялись в трёх направлениях:

- моделирование параллельной модулярной арифметики, использующей комплексные числа;
- макетирование технических устройств, поддерживающих арифметику, в частности для табличного выполнения машинных операций по относительно малым модулям;
- поиск областей эффективного применения модулярной арифметики, использующей комплексные числа.

#### IV. ОРГАНИЗАЦИЯ НАУЧНЫХ СЕМИНАРОВ И НЕКОТОРЫЕ БЫТОВЫЕ ПОДРОБНОСТИ

Приезды членов АН КазССР члена-корреспондента И.Я. Акушского и академика В.М. Амербаева на сессии Академии наук происходили регулярно (один-два раза в год) и превращались в запоминающийся трудовой праздник для их учеников и аспирантов, работающих в Институтах математики и механики, сейсмологии, физики высоких энергий АН КазССР. Тщательно планировался и скрупулёзно выполнялся плотный график научных семинаров с докладами как самих маститых ученых, так и их молодых коллег. Поток изобретений и патентов, создаваемых разработчиками, с помощью специалистов патентного отдела под руководством А.О. Жаутыкова, который профессионально разбирался в тенденциях развития этой области знаний. Отдельные изобретения были оформлены настолько тщательно и аккуратно, что не вызвали вопросов у экспертов государственного института патентной экспертизы (патентного ведомства) и ровно через нормативный срок авторы получали авторские свидетельства на изобретения. Более сложная процедура, требующая значительного времени, совместно выполнялась сотрудниками патентного отдела Института математики и Президиума АН для оформления зарубежных патентов на перспективные и оригинальные конструкции [4, 6, 7].

По причине возраста И.Я. Акушский приезжал обычно поездом в купе СВ вместе со своей женой и торжественно встречался на железнодорожном вокзале Алма-Ата 1 (в городе были два вокзала), затем доставлялся в резиденцию Академии наук в центре Алма-Аты. Из резиденции ему было удобно приходить в Президиум АН и Математический институт и уходить часто поздно вечером, так как жаркие научные семинары затягивались до позднего времени.

Однажды, встречая в аэропорту В.М. Амербаева, мы были приятно удивлены тем вниманием, которое сотрудники аэропорта оказывали ему, прилетевшему в форме генерала гражданской авиации. Уровень шевронов на его погонах превышал уровень шевронов начальника Алма-Атинского международного аэропорта! Оказалось, что в тот период он заведовал профильной кафедрой в Московском институте инженеров гражданской авиации с целью развития и исследования вычислительных моделей управления движущимися объектами в режимах «автопилота». При плотном графике работ для отдыха при наличии возможностей регулярно выполнялись коллективные поездки в Алма-Атинские горы, на горную базу Академии наук на перевале Чимбулак, на экспериментальную базу Института сейсмологии вблизи Большого Алма-Атинского озера, а также на туристическую базу Института математики и механики на озеро Сайран.

#### V. ОСОБЕННОСТИ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Позиционная арифметика в комплексной области не играет столь решающего значения, как в вещественной области, поскольку в комплексной области отсутствует свойство упорядоченности чисел, а технические реализации операций сложения и умножения позиционных кодов представления числовых величин сильно усложняются каскадами сквозных переносов.

По указанной причине ещё больший интерес, чем для вещественной области, представляет исследование средств непозиционного кодирования комплексных числовых величин. Эффективность непозиционного кодирования комплексных величин определяется в сравнении с позиционными кодами отсутствием поразрядных переносов, параллельностью вычислительного процесса и помехозащитными свойствами арифметических операций, в комплексной области ожидаемо проявляются существенные преимущества табличной машинной реализации непозиционных кодов по сравнению с позиционными.

Исследователями под руководством академика В.М. Амербаева получены следующие существенные результаты. Удалось обобщить модулярное представление числовых величин на объекты большей размерности, чем вещественные числа. Первыми многомерными объектами, на которые обратили внимание группа исследователей под руководством В.М. Амербаева (И.Я. Акушский, В.М. Амербаев, И.Т. Пак) являлись комплексные числа. В частности, модулярная арифметика комплексных чисел, в которой существенно достигнута эффективность машинной реализации алгоритмов немодульных операций благодаря использованию попарно взаимно простых комплексно-сопряженных оснований. Введено определение гауссовой арифметики как арифметики кольца вычетов комплексных гауссовых чисел по составному модулю, состоящему из взаимно-простых попарно комплексно-сопряженных целых гауссовых чисел. В гауссовой арифметике все вычислительные процедуры реализуются в классе вещественных вычетов по вещественным модулям, являющимися модулями комплексно-сопряженных целых гауссовых чисел [4, 5].

Показано, что фундаментальные операции линейной алгебры, такие как скалярное произведение векторов, умножение матриц на вектор, произведение двух и большего числа матриц – представляют класс процедур, допускающих распараллеливание, следовательно, эффективную реализацию в гауссовой арифметике комплексных чисел.

Большая эффективность достигается в гауссовой арифметике при решении алгебраических систем уравнений высокого порядка итерационными вычислительными методами, в том числе описываемых плохо-обусловленными матрицами. В.М. Амербаевым исследовались также вопросы модулярного кодирования в матричной алгебре, оценки сложности и разработки методов решения в смысле минимальной нормы невязки линеаризованных систем линейных алгебраических уравнений, описывающих моделируемые процессы в сложных системах с вычислением псевдообратных матриц [4].

Последние вопросы в дальнейшем нашли приложение в численных нейросетевых методах расчёта.

Для отдельных классов задач такая арифметика оказалась эффективнее традиционной позиционной, так как вычисление отдельных функций (функций типа свёртки), характерных для линейной алгебры, выполнялось с меньшей временной сложностью, что позволило развить и перенести процесс исследования на ещё более сложные объекты – кватернионы и бикватернионы. Эти многомерные объекты также имели непосредственное приложение в моделях описания процессов движения сложных объектов. Исследования велись совместно с представителями Института кибернетики другой республиканской Академии наук под руководством профессора М.В. Синькова.

#### VI. ПРИЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРЕИМУЩЕСТВ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

Новые результаты, полученные при исследовании модулярной арифметики комплексных чисел, нашли отражение в четырёх монографиях, изданных в издательстве «Наука» АН КазССР и ряде тематических сборников научных статей, в которых публиковались результаты молодых исследователей [5, 6, 7]. Большое внимание академик В.М. Амербаев уделял вопросам реализации полученных результатов исследований и взаимодействию с производственными организациями. Это давало дополнительное финансирование выполняемым работам по макетированию специализированных технических устройств, поддерживающих модулярную арифметику. Под руководством академика В.М. Амербаева и профессора И.Т. Пака сотрудниками Института математики и механики АН КазССР на основе полученных результатов исследований был выполнен большой объём научно-исследовательских работ с рядом научно-производственных объединений страны оборонного профиля, частности НПО «Алмаз», «Астрофизика» и других [6, 7].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. М.: Советское радио, 1968. 440 с.
2. Амербаев В.М. Теоретические основы машинной арифметики. Алма-Ата: Наука, 1976. 320 с.
3. Акушский И.Я., Амербаев В.М., Пак И.Т. Основы машинной арифметики комплексных чисел. Алма-Ата: Наука, 1970. 247 с.
4. Амербаев В.М., Пак И.Т. Параллельные вычисления в комплексной области. Алма-Ата: Наука, 1984. 183 с.
5. Теория кодирования и информационное моделирование. Сборник статей / Под редакцией Акушского И.Я., Амербаева В.М. Алма-Ата: Наука, 1973. 198 с.
6. Теория кодирования и сложность вычислений. Сборник статей / Под редакцией Амербаева В.М. Алма-Ата: Наука, 1980. 230 с.
7. Автоматизация научных исследований. Сборник статей. / Под редакцией Султангазина У.М., Пак И.Т. Алма-Ата: Наука, 1982. 216 с.